**黒木玄 Gen Kuroki**
@genkuroki

mathtod.online/@Shimoya_man/24…

線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = ay$$

の解き方をどう教えるかですが、たーくさんの解き方があるので悩みますね。

(1) 解の一意性を使う。$e^{at}y(0)$ は解である。$y(t)$ は $dy/dt = ay$ と $y(0)$ から唯一に決まるので $y(t) = e^{at}y(0)$.

こういう教え方にするときには、解の一意性が成立する直観的理由をきちんと説明するべき。

2017年06月10日 08:23 · Web · 0 · 1 · Webで開く

---

**黒木玄 Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago

(2) 昔の高校の教科書風？

$$\frac{dy}{y} = a\,dt$$

の両辺を$y$で積分すると

$$\log y = at + b$$

なので

$$y = e^{at+b}.$$

$dy, dt$が単独で意味を持たないかのように教えている数学の先生はものすごくまずい。微分形式につながる微分法の定式化を理解していないので勉強し直さないとまずいです。
mathtod.online/@genkuroki/2686…

$dy, dt$を単独で見せないという不健全な教え方をしたければ(特に物理ではやめて欲しい)、

$$\frac{1}{y} = a\frac{dt}{dy}$$

と書いて $y$ で積分すればよい。

---

**黒木玄 Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago

(3) 差分近似の極限。微分の定義式

$$
\begin{aligned}
&y(t+\Delta t) = y(t) + ay(t)\Delta t + o(\Delta t) \\
&= (1 + a\Delta t)y(t) + o(\Delta t), \\
&\lim_{\Delta t\to 0}(o(\Delta t)/\Delta t) = 0
\end{aligned}
$$

を、$\Delta t = t/n$ と置いて $n$ 回使うと、

$$
\begin{aligned}
&y(t) = \left(1 + a\frac{t}{n}\right)^n y(0) + o(1), \\
&\lim_{n\to\infty} o(1) = 0
\end{aligned}
$$

なので(厳密ではないが健全な議論)、$n\to\infty$として

$$
y(t) = e^{at}y(0).
$$

微分の定義は

$$
f'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}
$$

と極限を取り切った式で教えるのではなく、上で採用した一次近似型にした方が健全な議論になりやすい。

---

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago

(4) Taylor展開。

$$
y' = ay,\ y'' = a^2 y,\ y''' = a^3 y,\ \dots
$$

なので

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y(0) + ty'(0) + \frac{t^2}{2}y''(0) + \frac{t^3}{3!}y'''(0) + \cdots \\
&= y(0) + aty(0) + \frac{(at)^2}{2}y(0) + \frac{(at)^3}{3!}y(0) + \cdots \\
&= \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{3!} + \cdots\right)y(0) \\
&= e^{at}y(0).
\end{aligned}
$$

Taylorの定理が易しいことについては
mathtod.online/@genkuroki/1990...
mathtod.online/@genkuroki/9975...

---

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago

(5) 逐次近似法。

$$
y(t) = y(0) + a\int_0^t y(t_1)\,dt
$$

の右辺の積分にこの式を代入し、同様のことを繰り返すと上と同じTaylor展開の式が得られる。

この計算は本質的にTaylorの定理を積分を使って出す方法と同じです。

Picardの逐次近似法(逐次代入法)は積分剰余項型Taylorの定理の仲間です。

---

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago

どういう教え方をするにしても、式の記号列だけで説明してはダメで、きちんと微分方程式を解くことが直観的に何をやっているかを、図やグラフや数値計算例を示して説明しないと、健全な教育にならないと思います。

意味がわからないまま公式を記号列として覚えさせて機械的に適用させることだけは絶対にやってはいけない。

そういうことをやらされることは精神的に苦痛。無意味に苦痛を与えることは典型的な悪です。

しかも苦痛の連続で感覚が鈍ってしまうとバカになってしまいます。

バカになることを若い人達にやらせるのは本当にまずい。

---

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 3 hours ago

$y(t)$ がベクトル値で $A$ が行列のときの $dy/dt = Ay$ も同様にして

$$
\begin{aligned}
&y^{(k)}(0) = A^k y(0),\\
&y(t)\\
&= y(0) + At\,y(0) + \frac{(At)^2}{2} y(0) + \frac{(At)^3}{3!} y(0) + \cdots\\
&= e^{At} y(0).
\end{aligned}
$$

$y(t)$ がベクトル値で $A(t)$ が $t$ の行列値函数のときの $dy(t)/dt = A(t)y(t)$ の場合には

$$
y(t) = y(0) + \int_0^t A(t_1) y(t_1)\,dt_1
$$

をそれ自身の被積分函数の中に代入することを繰り返して(Picardの逐次近似法)、

$$
y(t) = \left[\sum_{n=0}^\infty \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\right] y(0)
$$

mathtod.online powered by Mastodon